Un théorème à la ”Thom-Sebastiani” pour les intégrales-fibres

Daniel Barlet

Un théorème à la "Thom-Sebastiani" pour les intégrale-fibres.

Daniel Barlet[*].

28/09/08 ; révisée le 24/09/09.

Abstract

The aim of this article is to prove a Thom-Sebastiani theorem for the asymptotics of the fiber-integrals. This means that we describe the asymptotics of the fiber-integrals of the function $f \oplus g : (x, y) \to f(x) + g(y)$ on $(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, (0, 0))$ in term of the asymptotics of the fiber-integrals of the holomorphic germs $f : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ and $g : (\mathbb{C}^q, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. This reduces to compute the asymptotics of a convolution $\Phi * \Psi$ from the asymptotics of Φ and Ψ modulo smooth terms.
To obtain a precise result, giving the non vanishing of expected singular terms in the asymptotic expansions of the fiber-integrals associated to $f \oplus g$, we have to compute the constants coming from the convolution process. We show that they are given by rational fractions of Gamma factors. This enable us to show that these constants do not vanish.

Résumé.

L'objet de cet article est de démontré un théorème "à la Thom-Sebastiani" pour les développements asymptotiques des intégrale-fibres des fonctions du type $f \oplus g : (x, y) \to f(x) + g(y)$ sur $(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, (0, 0))$ en terme des développements asymptotiques des intégrale-fibres associées aux germes holomorphes $f : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ et $g : (\mathbb{C}^q, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Ceci se ramène à calculer les développements asymptotiques d'une convolution $\Phi * \Psi$ à partir des développements asymptotiques de Φ et Ψ modulo les termes non singuliers.

[*]Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

Pour obtenir un résultat précis donnant la non nullité des termes singuliers attendus dans les développements asymptotiques des intégrale-fibres associées à $f \oplus g$, nous devons calculer les constantes qui apparaissent dans la convolution. Nous montrons qu'elles sont données par des fractions rationnelles de facteurs Gamma, ce qui nous permet de montrer qu'elles sont non nulles.

AMS Classification (2000) : 32-S-25, 32-S-40, 32-S-50.

Key words : Asymptotic expansions, fiber-integrals, Thom-Sebastiani theorem.

Mots clefs : Développements asymptotiques, intégrale-fibres, théorème de Thom-Sebastiani.

Titre abrégé : Thom-Sebastiani ...

Titre anglais : A Thom-Sebastiani theorem for fiber-integrals.

Contents

1 Introduction.

Le but du present article est de montrer directement un théorème à la "Thom-Sebastiani" (voir [S.-T. 71]) pour les développements asymptotiques des intégrale-fibres d'une fonction de la forme $(x, y) \to f(x) + g(y)$ où f et g sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^q$ respectivement.
Il résulte du théorème général de développement asymptotique des intégrale-fibres (voir [B. 82]), qu'une intégrale-fibre, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$s \to F_\varphi(s) = \int_{f=s} \frac{\varphi}{df \wedge d\bar{f}}$$

où $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non constante sur une variété complexe U de dimension $n+1$ et φ une $(n+1, n+1)-$forme $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans U, peut s'écrire, au voisinage de $s = 0$,

$$F_\varphi(s) = \sum_{\alpha \in A, j \in [0, \mu(\alpha)]} \theta_{\alpha,j}(s).|s|^{2\alpha}.(Log|s|)^j \; + \; \xi(s)$$

où les fonctions $\theta_{j,\alpha}$ et ξ sont $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $s = 0$, où $A \subset]-1, +\infty[\cap \mathbb{Q}$ est un ensemble fini et où $\mu : A \to \mathbb{N}$ est une application à valeurs dans $[0, n]$.
Nous dirons qu'une fonction qui admet une telle écriture au voisinage de l'origine admet un développement asymptotique standard uniforme[1] de type (A, μ) en $s = 0$.
En fait, le résultat que nous présentons consiste essentiellement à montrer la stabilité par convolution de la classe des fonctions admettant à l'origine de $\mathbb{C}$ des "développements asymptotiques standards uniformes", en précisant les exposants et les degrés des termes logarithmiques de la convolée à partir des informations correspondantes pour les fonctions initiales.
Donnons une définition qui facilitera l'énoncé de notre résultat.

Définition 1.0.1 *Pour deux types donnés* (A, μ) *et* (B, ν) *nous définirons le type* $(A * B, \mu * \nu)$ *de la façon suivante :*

$A * B = \{\alpha + \beta + 1, \alpha \in A, \beta \in B\}$.
$(\mu * \nu)(\alpha + \beta + 1) = \mu(\alpha) + \nu(\beta)$ quand α, β et $\alpha + \beta + 1$ ne sont pas dans $\mathbb{N}$.
$(\mu * \nu)(\alpha + \beta + 1) = \mu(\alpha) + \nu(\beta) + 1$ quand $\alpha + \beta + 1 \in \mathbb{N}, \alpha$ et β non dans $\mathbb{N}$.
$(\mu * \nu)(\alpha + \beta + 1) = \mu(\alpha) + \nu(\beta) - 1$ quand α ou β (ou les deux) sont dans $\mathbb{N}$.

Précisément nous montrons le premier théorème suivant :

Théorème 1.0.2 (Thom-Sebastiani pour les intégrale-fibres.) *Soient* f *et* g *deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dans* $\mathbb{C}^p$ *et* $\mathbb{C}^q$ *respectivement. Supposons que les intégrale-fibres de* f *et* g *admettent des développements*

[1] nous considérons ici des fonctions "uniformes" contrairement aux fonctions holomorphes "multiformes" que l'on obtient dans les intégrales "à la Malgrange", c'est à dire en intégrant des formes holomorphes sur des familles horizontales de cycles (voir [M. 74]).

asymptotiques standards uniformes de type respectifs (A,μ) *et* (B,ν). *Alors les intégrale-fibres de la fonction* $f\oplus g\,:\,(x,y)\rightarrow f(x)+g(y)$ *admettent des développements asymptotiques standards uniformes de type* $(A*B,\mu*\nu)$.

Mais au delà du résultat qualitatif du théorème 1.0.2 qui permet de prévoir quel terme peut apparaître dans le développement asymptotique standard uniforme de la convolution de deux fonctions admettant de tels développements asymptotiques, il est important de savoir si les termes "candidats" donnés dans ce théorème donnent effectivement des termes non nuls pour la convolée. Ce problème est assez délicat, et en présence de plusieurs termes dans les développements asymptotiques des fonctions initiales, des phénomènes de compensations peuvent se produire et faire disparaître un terme attendu. Aussi dans la seconde partie de cet article étudions-nous en détail le cas de la convolution de deux fonctions admettant un seul terme singulier non nul dans leurs développements asymptotiques respectifs[2]. Nous montrons dans ce cas que le terme attendu pour la convolution est effectivement non nul, c'est à dire que nous prouvons le théorème précis énoncé ci-dessous.
Il n'est pas difficile de se convaincre que pour ce faire on doit calculer précisement les constantes qui apparaissent lors de l'opération de convolution, ce qui amène à faire toute une série de calculs qui sont assez fastidieux et pas aussi simples qu'on pourrait le penser à priori.
Mais, heureusement, les constantes trouvées s'expriment dans tous les cas comme des "fractions rationnelles de facteurs Gammas". On peut donc montrer la non nullité des constantes qui interviennent et donc répondre complètement à la question posée dans le cas considéré.

Un corollaire combinant la proposition 1.0.3 ci-dessous et le théorème précis 1.0.4 montre alors que, quitte à bien choisir la forme test et à admettre un décalage des exposants entiers, décalage borné ne dépendant que de f,g et des compacts considérés, le terme attendu associé à des termes apparaissant effectivement pour f et g, apparaît effectivement pour la fonction $f\oplus g$.

On notera que le calcul explicite des constantes permettra à l'utilisateur potentiel qui souhaite aller au dela de l'énoncé de notre "théorème précis" et de son corollaire de déterminer dans le cas général, c'est à dire pour un produit de formes test données arbitraires, si un phénomène de compensation se produit dans le cas de la fonction convolée des deux intégrale-fibres données. Le cas où la somme $r+r'$ n'admet qu'une seule écriture avec $r\in A_f, r'\in B_g$ est probablement simple à élucider.

Avant de donner l'énoncé du théorème précis, il est important de disposer du résultat suivant qui permet effectivement de satisfaire l'hypothèse de ce théorème.

---

[2]en fait on regroupe ensemble les différentes puissances de $Log|s|$ correspondant aux mêmes exposants pour s et $\bar{s}$.

Proposition 1.0.3 *Soit* $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *un germe de fonction holomorphe, et soit* $f : X \to D$ *un représentant de Milnor de* $\tilde{f}$. *Soit* $K \subset X$ *un compact ; il existe un entier* κ *ne dépendant que de* f *et de* K *vérifiant la propriété suivante: soit* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_K(X, \mathbb{C})^{n,n}$ *une* $(n, n)-$*forme test telle que la fonction*

$$s \to \int_{f=s} \varphi$$

admette le terme $c.|s|^{2r}.s^m.\bar{s}^{m'}.(Log|s|)^j$ *dans son développement asymptotique en* $s = 0$, *avec* $c \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[, j \in [0, n]$ *et* $(m, m') \in \mathbb{N}^2$, *où nous supposerons l'entier* j *maximal pour* r, m, m' *donnés. Alors pour tout* $N \geq \kappa + 1 + (m + m')/2$ *il existe* $\varphi_N \in \mathscr{C}^\infty_K(X, \mathbb{C})^{n,n}$ *vérifiant*

$$\int_{f=s} \varphi_N = |s|^{2r}.s^{m+\kappa}.\bar{s}^{m'+\kappa}.P_j(Log|s|) + \mathcal{O}(|s|^{2N}),$$

où P_j *est un polynôme unitaire de degré* j.

Théorème 1.0.4 (Le théorème de Thom-Sebastiani précis.) *Soient* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *deux germes de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dans* $\mathbb{C}^p$ *et* $\mathbb{C}^q$ *respectivement, et notons* $f : X \to D$ *et* $g : Y \to D'$ *des représentants de Milnor de ces germes. Soient* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(X)^{p,p}$ *et* $\psi \in \mathscr{C}^\infty_c(Y)^{q,q}$ *des formes test vérifiant les propriétés suivantes :*

- *Il existe des rationnels* $r, r' \in]-1, 0]$ *des entiers* m, n, m', n', j, j' *et un entier* $N > m + n + m' + n' + 1$ *tels que l'on ait*

$$\int_{f=s} \frac{\varphi}{df \wedge d\bar{f}} = |s|^{2r}.s^m.\bar{s}^n.P_j(Log|s|) + \mathcal{O}(|s|^{2N})$$
$$\int_{g=s} \frac{\varphi}{dg \wedge d\bar{g}} = |s|^{2r'}.s^{m'}.\bar{s}^{n'}.Q_{j'}(Log|s|) + \mathcal{O}(|s|^{2N})$$

où P_j *et* $Q_{j'}$ *sont des polynômes* **unitaires** *de degrés respectifs* j *et* j'. *On supposera que pour* $r = 0$ *(resp* $r' = 0$*) on a* $j \geq 1$ *(resp.* $j' \geq 1$*).*
Alors on a, modulo un polynôme χ_N *de degré (total)* $\leq 2N - 1$ *l'égalité*

$$\int_{f(x)+g(y)=s} \frac{\varphi(x) \wedge \psi(y)}{d(f(x) + g(y)) \wedge d(\overline{f(x) + g(y)})} =$$

$$c.|s|^{2(r+r'+1)}.s^{m+m'}.\bar{s}^{n+n'}.R(Log|s|) + \chi_N(s, \bar{s}) + \mathcal{O}(|s|^{2N})$$

où c *est un nombre complexe* **non nul** *et où* R *est un polynôme* **unitaire** *dont le degré est déterminé de la façon suivante :*

- *si* r, r' *et* $r + r' + 1$ *sont non nuls le degré de* R *est* $j + j'$.
- *si* r *et* r' *sont non nuls mais* $r + r' + 1 = 0$ *le degré de* R *est* $j + j' + 1$.
- *si* r *ou* r' *est nul (ou les deux) le degré de* R *est* $j + j' - 1$.

Remarque. Si on a $r = 0$ et $j = 0$ alors l'intégrale fibre de φ ne présente qu'un terme non singulier (modulo $\mathcal{O}(|s|^{2N})$) et donc la convolution des deux intégrale-fibres aura au moins la même régularité que l'intégrale fibre de φ. On ne peut donc pas espérer de terme singulier dans ce cas. □

On notera que la valeur précise de la constante c qui dépend de r, r', m, m', n, n' est donnée dans la section 3.

La démonstration du théorème précis est l'objet de la section 3 et découle des corollaires 3.2.2, 3.3.2 et 3.5.3.

Combiné avec la proposition 1.0.3, ce théorème donne immédiatement le corollaire suivant qui précise "presque complètement" le module des développements asymptotiques de la fonction $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$ à partir de ceux de f et g.

Corollaire 1.0.5 *Dans la situation du théorème précédent, fixons des compacts $K \subset X$ et $L \subset Y$; il existe un entier κ, ne dépendant que de f, g, K, L, tel que, si les intégrale-fibres des formes $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_K(X)^{p,p}$ et $\psi \in \mathscr{C}^\infty_L(Y)^{q,q}$ admettent respectivement dans leurs développements asymptotiques les termes*

$$c.|s|^{2r}.s^m.\bar{s}^n.(Log|s|)^j \quad \text{resp.} \quad c'.|s|^{2r'}.s^{m'}.\bar{s}^{n'}.(Log|s|)^{j'}$$

avec $c.c' \neq 0$ les entiers j et j' étant maximaux pour r, m, n (resp. r', m', n') donnés, alors il existe une forme test θ dans $\mathscr{C}^\infty_c(X \times Y)^{p+q,p+q}$ telle que le développement asymptotique de l'intégrale-fibre

$$\int_{f(x)+g(y)=s} \frac{\theta(x, y)}{d(f(x) + g(y)) \wedge d(\overline{f(x) + g(y)})}$$

contienne le terme

$$c.c'.|s|^{2(r+r'+1)}.s^{m+m'+\kappa}.\bar{s}^{n+n'+\kappa}.R(Log|s|)$$

où R est un polynôme **unitaire** *dont le degré est déterminé de la façon suivante :*

- *si r, r' et $r + r' + 1$ sont non nuls le degré de R est $j + j'$.*
- *si r et r' sont non nuls mais $r + r' + 1 = 0$ le degré de R est $j + j' + 1$.*
- *si r ou r' est nul (ou les deux) le degré de R est $j + j' - 1$.*

Remarque. Comme on l'a déjà fait remarquer plus haut, des compensations éventuelles entre divers termes des développements asymptotiques ne permettent pas, en général, d'assurer que la forme test $\varphi\wedge\psi$ aura dans le développement asymptotique de son intégrale-fibre le terme attendu correspondant aux termes donnés dans les développements asymptotiques des intégrale-fibres de φ et ψ.

Autrement dit, la forme test θ sera, en général, différente de $\varphi \wedge \psi$, et le décalge par l'entier κ sera nécessaire.

Une conséquence simple de ces résultats est le corollaire suivant, sur le polynôme de Bernstein à l'origine (voir par exemple [K. 76]) d'une fonction de la forme $(x,y) \mapsto f(x)+g(y)$, qui peut également se déduire du théorème de Thom-Sebastiani topologique (voir [Sak.73]) et des résultats de Malgrange-Kashiwara (voir [M.83] ou bien [Bj.93] ch. 6) sur le lien entre la monodromie du complexe des cycles evanescents et les racines du polynôme de Bernstein.
Mais, bien sûr, les résultats ci-dessus sont bien plus précis puisque, non seulement il sont au niveau des termes singuliers des développements asymptotiques, mais aussi puisqu'ils contrôlent les décalages entiers dans les puissances de s et $\bar{s}$.

Corollaire 1.0.6 (Thom-Sebastiani pour le polynôme de Bernstein.) *Soient $f : (\mathbb{C}^p, 0) \to \mathbb{C}, 0)$ et $g : (\mathbb{C}^q, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ deux germes non constants de fonctions holomorphes. Alors toute racine du polynôme de Bernstein à l'origine du germe $f \oplus g : (x,y) \to f(x) + g(y)$ est modulo $\mathbb{Z}$ somme d'une racine du polynôme de Bernstein de f en 0 et d'une racine du polynôme de Bernstein de g en 0. Réciproquement, si α et β sont des racines respectivement des polynômes de Bernstein de f et g à l'origine, il existe une racine γ du du polynôme de Bernstein de $f \oplus g : (x,y) \to f(x) + g(y)$ qui est congrue modulo $\mathbb{Z}$ à $\alpha + \beta$.*

2 Le théorème de convolution.

2.1 Utilisation du théorème de Fubini.

Commençons par montrer comment le théorème de Fubini permet de ramener notre problème à la détermination du développement asymptotique à l'origine d'une convolution.

Proposition 2.1.1 *Soient $f : X \to D$ et $g : Y \to D$ des représentants de Milnor de deux germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^q$ respectivement. Pour ρ (resp. σ) une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans X (resp. dans Y) notons $\Phi_{f,\rho}$ (resp. $\Psi_{g,\sigma}$) l'intégrale fibre*

$$\Phi_{f,\rho}(s) := \int_{f(x)=s} \rho(x).\frac{dx \wedge d\bar{x}}{df \wedge d\bar{f}} \quad \text{(et respectivement)}$$

$$\Psi_{g,\sigma}(t) := \int_{g(y)=t} \sigma(y).\frac{dy \wedge d\bar{y}}{dg \wedge d\bar{g}}$$

Alors on a l'égalité, pour $s \in \mathbb{C}$ *:*

$$\int_{f(x)+g(y)=s} \rho(x).\sigma(y).\frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{d(f+g) \wedge d\overline{(f+g)}} = \int_{\mathbb{C}} \Phi_{f,\rho}(s-u).\Psi_{g,\sigma}(u).du \wedge d\bar{u}.$$

Preuve. Commençons par remarquer que, d'après le Nullstellensatz, il existe un entier N en une $(p-1,p-1)-$forme ω de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $Supp(\rho)$ dans $\mathbb{C}^p$ vérifiant

$$\omega \wedge df \wedge d\bar{f} = |f(x)|^{2N}.dx \wedge d\bar{x}.$$

On a alors, au voisinage de $Supp(\rho) \times Supp(\sigma)$, l'égalité

$$\omega \wedge dy \wedge d\bar{y} \wedge d(f+g) \wedge d\overline{(f+g)} = |f(x)|^{2N}.dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}.$$

On peut alors écrire, toujours au voisinage de $Supp(\rho) \times Supp(\sigma)$, sur la fibre $\{f(x)+g(y)=s\}$:

$$\frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{d(f+g) \wedge d\overline{(f+g)}} = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{df \wedge d\bar{f}} \wedge dy \wedge d\bar{y}.$$

Alors le Théorème de Fubini donne

$$\int_{f(x)+g(y)=s} \rho(x).\sigma(y).\frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{d(f+g) \wedge d\overline{(f+g)}} =$$

$$\int_{y\in\mathbb{C}^q} \sigma(y).dy \wedge d\bar{y}.\Big(\int_{f(x)=s-g(y)} \rho(x).\frac{dx \wedge d\bar{x}}{df \wedge d\bar{f}}\Big) =$$

$$\int_{u\in\mathbb{C}} \Phi_{f,\rho}(s-u).\Big(\int_{g(y)=u} \sigma(y).\frac{dy \wedge d\bar{y}}{dg \wedge d\bar{g}}\Big).du \wedge d\bar{u} =$$

$$\int_{u\in\mathbb{C}} \Phi_{f,\rho}(s-u).\Psi_{g,\sigma}(u).du \wedge d\bar{u} \qquad \blacksquare$$

2.2 Le théorème de convolution.

Montrons maintenant notre théorème de développement asymptotique pour une convolution.

Théorème 2.2.1 *Considérons deux nombres réels* α *et* β *strictement plus grands que* -1 *et soient* θ *et* η *deux fonctions dans* $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{C})$*, et posons, pour* $s \in \mathbb{C}^*$*,*

$$F_{\alpha,\beta,j,k}(s) := \frac{1}{2i\pi}.\int_{\mathbb{C}} \theta(s-u).\eta(u).|s-u|^{2\alpha}.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2\beta}.(Log|u|^2)^k.du \wedge d\bar{u}.$$

Alors il existe des fonctions $(\zeta_l)_{l\in[0,L]}$ *et* ξ *dans* $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ *telles que l'on ait*

$$F_{\alpha,\beta,j,k}(s) = \sum_{l=0}^{L} \zeta_l(s).|s|^{2(\alpha+\beta+1)}.(Log|s|^2)^l + \xi(s)$$

où l'on a

- $L = j+k$ *si* $\alpha,\beta,\alpha+\beta+1 \notin \mathbb{N}$,
- $L = j+k+1$ *si* $\alpha,\beta \notin \mathbb{N}$ *et si* $\alpha+\beta+1 \in \mathbb{N}$,
- $L = j+k-1$ *si* α *ou* β *ou les deux sont entiers.*

De plus, on a $L = -1$ *dès que* $\alpha \in \mathbb{N}$ *et* $j = 0$ *ou, symétriquement, dès que* $\beta \in \mathbb{N}$ *et* $k = 0$.

Démonstration. Nous la ferons en plusieurs étapes.

Première étape. Remarquons déjà que les conditions $\alpha > -1$ et $\beta > -1$ assurent que, pour $s \neq 0$ la fonction intégrée est localement intégrable. De plus le support compact de la fonction η montre l'intégrabilité globale. La fonction est donc bien définie sur $\mathbb{C}^*$.
Le changement de variable $v = s-u$ dans l'intégrale définissant la fonction $F_{\alpha,\beta,j,k}$ montre que les triplets (θ,α,j) et (η,β,k) jouent des rôles symétriques.
Par ailleurs il est clair que pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $j = 0$ on a une convolution entre une fonction $\mathscr{C}_c^\infty$ est une fonction intégrable à support compact . On obtient donc une fonction $\mathscr{C}_c^\infty$, et de même pour $\beta \in \mathbb{N}$ et $k = 0$.

Seconde étape. Fixons $\varepsilon > 0$. L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}.\int_{|u|\geq\varepsilon} \theta(s-u).\eta(u).|s-u|^{2\alpha}.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2\beta}.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar{u}$$

donne manifestement une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $\{|s| < \varepsilon/2\}$, puisque maintenant la fonction intégrée est $\mathscr{C}^\infty$ en s et majorée par une fonction intégrable fixe ainsi que chacune de ses dérivée partielles en $s,\bar{s}$.
Pour prouver l'existence du développement asymptotique à l'origine de la fonction $F_{\alpha,\beta,j,k}$ il suffit donc de le faire pour la fonction obtenue en intégrant seulement sur le disque $\{|u| \leq \varepsilon\}$.

Troisième étape. Montrons maintenant que si la fonction θ est plate à l'ordre $N \geq 1$ à l'origine, alors la fonction $F_{\alpha,\beta,j,k}$ est de classe $\mathscr{C}^{N-1}$ au voisinage de l'origine. Comme notre hypothèse permet d'écrire

$$\theta(v) = \sum_{i=0}^{N+1} v^i.\bar{v}^{N-i+1}.\theta_i(v)$$

où les fonctions θ_i sont dans $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{C})$, il s'agit de voir que, pour chaque $i \in [0, N+1]$, la fonction $s \mapsto G_i(s)$ définie par l'intégrale

$$\int_{|u|\leq\varepsilon} (s-u)^i.\overline{(s-u)}^{N-i+1}.\theta_i(s-u).\eta(u).|s-u|^{2\alpha}.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2\beta}.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar{u}$$

est de classe $\mathscr{C}^{N-1}$ au voisinage de l'origine. Montrons ceci par récurrence sur $N \geq 1$. Pour $N = 1$ il s'agit de voir que les fonctions G_0, G_1 et G_2 sont continues au voisinage de l'origine. Ceci résulte immédiatement du fait que la fonction

$$(s-u)^i.\overline{(s-u)}^{2-i}.\theta_j(s-u).|s-u|^{2\alpha}.(Log|s-u|^2)^j$$

est continue en (s, u) pour $i = 0, 1, 2$ puisque $\alpha > -1$, et de l'intégrabilité de la fonction $u \mapsto \eta(u).|u|^{2\beta}.(Log|u|^2)^k$.
Supposons l'assertion montrée pour $N - 1 \geq 1$ et montrons-là pour N.
On a, d'après le théorème de dérivation de Lebesgue,

$$\frac{\partial G_i}{\partial s}(s) = (i+\alpha).\int_{|u|\leq\varepsilon} (s-u)^{i-1}.\overline{(s-u)}^{N-i+1}.\theta_i(s-u).\eta(u).R_{\alpha,\beta,j.k}(s,u).du\wedge d\bar{u}+$$
$$\int_{|u|\leq\varepsilon} (s-u)^i.\overline{(s-u)}^{N-i+1}.\frac{\partial\theta_i}{\partial v}(s-u).\eta(u).R_{\alpha,\beta,j,k}(s,u).du\wedge d\bar{u}+$$
$$j.\int_{|u|\leq\varepsilon} (s-u)^{i-1}.\overline{(s-u)}^{N-i+1}.\theta_i(s-u).\eta(u).R_{\alpha,\beta,j-1,k}(s,u).du\wedge d\bar{u}$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$R_{\alpha,\beta,j,k}(s,u) = |s-u|^{2\alpha}.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2\beta}.(Log|u|^2)^k$$

On constate alors que, comme les fonctions

$$v^{i-1}.\bar{v}^{N-i+1}.\theta_i(v) \quad \text{et} \quad v^i.\bar{v}^{N-i+1}.\frac{\partial\theta_i}{\partial v}(v)$$

sont plates à l'ordre $N - 1$ à l'origine, l'hypothèse de récurrence donne que $\frac{\partial G_i}{\partial s}$ est de classe $\mathscr{C}^{N-2}$ au voisinage de l'origine. Comme il en est de même pour $\frac{\partial G_i}{\partial \bar{s}}$, par un calcul analogue à ce que l'on vient de voir, ceci achève la preuve de notre assertion.

Quatrième étape. Etudions maintenant les fonctions suivantes :

$$G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}(s) := \int_{|u|\leq 1} u^p.\bar{u}^q.|s-u|^{2\alpha}.(Log|s-u|)^j.|u|^{2\beta}(Log|u|)^k.du\wedge d\bar{u}$$

où j, k, p, q sont des entiers et où α et β sont des réels strictement plus grands que -1. On va établir la proposition suivante :

Proposition 2.2.2 *La fonction* $G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}$ *est de la forme suivante:*

- *pour* $p \geq q$ *:*

$$\sum_{l=0}^{L} c_l.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}.s^p.\bar{s}^q.(Log|s|)^l \ + \ s^{p-q}.\Phi(|s|^2)$$

- *pour* $p \leq q$ *:*

$$\sum_{l=0}^{L} c_l.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}.s^p.\bar{s}^q.(Log|s|)^l \ + \ \bar{s}^{q-p}.\Phi(|s|^2)$$

où Φ *est une fonction analytique au voisinage de l'origine qui dépend de* $\alpha, \beta, j, k, p, q$, *où les constantes* c_l *dépendent également de* $\alpha, \beta, j, k, p, q$, *et où l'on a*

- $L = j + k$ *quand* $\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 \not\in \mathbb{N}$,
- $L = j + k + 1$ *quand* $\alpha + \beta + 1 \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha, \beta \not\in \mathbb{N}$,
- $L = j + k - 1$ *quand* α *ou* β *ou les deux sont entiers.*

On notera que ceci implique que la fonction $G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}$ est $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de l'origine et admet, quand $s \to 0$ un développement asymptotique avec des termes "singuliers"[3] éventuels bien précis, et que ce développement asymptotique est indéfiniment dérivable, c'est-à-dire que toute dérivée partielle de $G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}$ admet quand $s \to 0$ le développement asymptotique obtenu en effectuant formellement les mêmes dérivées partielles sur le développement asymptotique trouvé que celles effectuées sur $G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}$.

Preuve. Posons $u = s.t$ pour $s \neq 0$. Alors $G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}(s)\big/s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}$ est donné par l'intégrale :

$$\int_{|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.|1-t|^{2\alpha}.|t|^{2\beta}.(Log|s.(1-t)|)^j.(Log|s.t|)^k.dt \wedge d\bar{t}.$$

Commençons par supposer que $\alpha + \beta + 1 \not\in \mathbb{N}$.
Comme l'intégrale pour $|t| \leq 3$ est un polynôme en $Log|s|$ de degré au plus $j + k$ dont les coefficients dépendent de façon $\mathscr{C}^\infty$ de $(\alpha, \beta) \in]-1, +\infty[^2$, nous pouvons nous contenter d'étudier la fonction $\Gamma^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}(s)\big/s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}$ donnée par l'intégrale :

$$\int_{3\leq|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.|1-t|^{2\alpha}.|t|^{2\beta}.(Log|s.(1-t)|)^j.(Log|s.t|)^k.dt \wedge d\bar{t}.$$

[3]c'est-à-dire qui ne sont pas dans $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$.

Ecrivons

$$(Log|s.t|)^k = (Log|s| + Log|t|)^k \qquad \text{et}$$
$$(Log|s.(1-t)|)^j = (Log|s| + Log|t| + Log|1-1/t|)^j$$

et développons notre intégrale par la formule du binôme. On obtient ainsi un polynôme de degré $\leq j+k$ en $Log|s|$ et le coefficient de $(Log|s|)^{j+k-h}$ est, à une combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions de la forme

$$\int_{3\leq|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.|1-t|^{2\alpha}.|t|^{2\beta}.(Log|1-1/t|)^{h_1}.(Log|t|)^{h_2}.dt\wedge d\bar{t}$$

où $h_1+h_2=h$.

En coordonnées polaires $t=\rho.e^{i\varphi}$ l'intégrale précédente donne, à une constante non nulle près,

$$\int_3^{1/|s|} \rho^{p+q+2(\alpha+\beta+1)}.(Log\,\rho)^{h_2}.\frac{d\rho}{\rho}.\int_0^{2\pi}|1-\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}|^{2\alpha}.(Log|1-\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}|)^{h_1}.e^{i(p-q)\varphi}.d\varphi.$$

Comme on a $\rho\geq 3$ on a un développement en série qui est normalement convergeant

$$|1-\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}|^{2\alpha}.(Log|1-\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}|)^{h_1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{\alpha,\nu}^{h_1}(cos\varphi).\rho^{-\nu}$$

ce qui donne que $\Gamma^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}(s)/s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}$ est combinaison linéaire à coefficients constants quand h_2 décrit $[0,j+k]$ de termes tels que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C^{h_1}_{\alpha,\nu}.\int_3^{1/|s|}\rho^{p+q+2(\alpha+\beta+1)-\nu}.(Log\,\rho)^{h_2}.\frac{d\rho}{\rho} \tag{*}$$

où $C^{h_1}_{\alpha,\nu} := \int_0^{2\pi}\ \gamma^{h_1}_{\alpha,\nu}(cos\varphi).e^{i.(p-q).\varphi}.d\varphi.$
On notera que le polynôme en $cos(\varphi), \gamma^{h_1}_{\alpha,\nu}(cos(\varphi))$, est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $\alpha\in]-1,+\infty[$, et donc que $C^{h_1}_{\alpha,\nu}$ dépend également de façon $\mathscr{C}^\infty$ de $\alpha\in]-1,+\infty[$.

Remarquons maintenant que la fonction

$$H^{p,q}_{\alpha,h_1}(x)=\int_0^{2\pi}|1-x.e^{-i\varphi}|^{2\alpha}.(Log|1-x.e^{-i\varphi}|)^{h_1}.e^{i(p-q)\varphi}.d\varphi$$

dont le développement en série à l'origine est donné par

$$H^{p,q}_{\alpha,h_1}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} C^{h_1}_{\alpha,\nu}.x^\nu$$

est $(-1)^{p+q}-$paire. Ceci se voit facilement en changeant x en $-x$ et φ en $\varphi+\pi$. Ceci montre que $C^{h_1}_{\alpha,\nu}$ est non nul seulement quand les entiers $p+q$ et ν ont

même parité.
On en déduit que, sous notre hypothèse $\alpha+\beta+1 \not\in \mathbb{N}$, l'exposant $2(\alpha+\beta+1)+p+q-\nu = 0$ n'apparaît pas dans le développement (*).

On a donc, pour $\alpha+\beta+1 \not\in \mathbb{N}$:

$$\Gamma^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}(s) = s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}.P_{j,k}(Log|s|) + (\frac{s}{|s|})^p.(\frac{\bar{s}}{|s|})^q.\Phi_{j,k}(|s|) \qquad (**)$$

où $P_{j,k}$ est un polynôme de degré $\leq j+k$, dont les coefficients dépendent de (α,β) de façon $\mathscr{C}^\infty$ ainsi que de p et q, et où $\Phi_{j,k}$ (qui dépend également de α,β,p,q) est analytique au voisinage de l'origine.
On remarquera que le calcul explicite des coefficients du développement en série de la fonction $\Phi_{j,k}$ montre qu'elle dépend de façon $\mathscr{C}^\infty$ de $(\alpha,\beta) \in (]-1,+\infty[)^2$, $\alpha+\beta+1 \not\in \mathbb{N}$.

Montrons maintenant par récurrence sur $j+k$ que la fonction

$$s \mapsto (\frac{s}{|s|})^p.(\frac{\bar{s}}{|s|})^q.\Phi_{j,k}(|s|)$$

est $\mathscr{C}^\infty$ en s au voisinage de l'origine.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, en posant $u = \lambda.v$ dans l'intégrale qui définit la fonction $G^{p,q}_{\alpha,\beta,0,0}$, on obtient :

$$G^{p,q}_{\alpha,\beta,0,0}(\lambda.s) = \lambda^p.\bar{\lambda}^q.|\lambda|^{2(\alpha+\beta+1)}.\int_{|v|\leq 1/|\lambda|} v^p.\bar{v}^q.|s-v|^{2\alpha}.|v|^{2\beta}.dv\wedge d\bar{v}$$

ce qui donne, puisque la fonction

$$s \mapsto \int_{1\leq|v|\leq 1/|\lambda|} v^p.\bar{v}^q.|s-v|^{2\alpha}.|v|^{2\beta}.dv\wedge d\bar{v}$$

est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $s=0$,

$$G^{p,q}_{\alpha,\beta,0,0}(\lambda.s) - \lambda^p.\bar{\lambda}^q.|\lambda|^{2(\alpha+\beta+1)}.G^{p,q}_{\alpha,\beta,0,0}(s) \in \mathscr{C}^\infty.$$

On aura donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ fixé,

$$\frac{1}{|\lambda|^{p+q}}.\lambda^p.\bar{\lambda}^q.(\frac{s}{|s|})^p.(\frac{\bar{s}}{|s|})^q.\big[\Phi_{0,0}(|\lambda.s|) - |\lambda|^{2(\alpha+\beta+1)+p+q}.\Phi_{0,0}(|s|)\big] \in \mathbb{C}[[s,\bar{s}]]. \qquad (***)$$

Écrivons le développement à l'origine de la fonction analytique

$$\Phi_{0,0}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m.x^m.$$

La relation $(^{***})$ donne alors que

$$\frac{1}{|\lambda|^{p+q}}.\lambda^p.\bar{\lambda}^q.(\frac{s}{|s|})^p.(\frac{\bar{s}}{|s|})^q.\Big[\sum_{m=0}^{\infty} c_m.(|\lambda|^m - |\lambda|^{2(\alpha+\beta+1)+p+q}).|s|^m\Big] \in \mathbb{C}[[s,\bar{s}]].$$

Comme on a supposé $(\alpha+\beta+1) \notin \mathbb{N}$, et que $\Phi_{0,0}$ est $(-1)^{p+q}-$paire, on en déduit que pour chaque $m \in \mathbb{N}$ tel que $c_m \neq 0$, on a

$$(\frac{s}{|s|})^p.(\frac{\bar{s}}{|s|})^q.|s|^m \in \mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$$

ce qui prouve notre assertion pour $j+k=0$.

Supposons l'assertion démontrée pour $j+k \leq n$ et montrons-là pour $j+k=n+1$. Supposons, par exemple $j \geq 1$. Alors on a, grâce à l'hypothèse de récurrence

$$G^{p,q}_{\alpha,\beta,j-1,k}(s) - s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}.P(Log|s|) \in \mathscr{C}^\infty.$$

Comme on a

$$\frac{\partial G^{p,q}_{\alpha,\beta,j-1.k}}{\partial\alpha} = G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}$$

et que la dépendance en $(\alpha,\beta) \in (]-1,+\infty[)^2$ des calculs précédents est $\mathscr{C}^\infty$, on obtient en dérivant en α la relation $(^{**})$ pour le couple $(j-1,k)$

$$G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}(s) - s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(\alpha+\beta+1)}.\big[P_{j-1,k}(Log|s|).Log|s|^2 + \frac{\partial P_{j-1,k}}{\partial\alpha}(Log|s|)\big] \in \mathscr{C}^\infty$$

ce qui prouve notre assertion pour le couple (j,k) en vertu de l'unicité du développement asymptotique.

Remarque. Si α ou β est entier, mais toujours en supposant que $\alpha+\beta+1 \notin \mathbb{N}$, on constate que pour $j+k=0$ on n'a pas de terme singulier pour la fonction $G^{p,q}_{\alpha,\beta,0,0}$. La récurrence sur $j+k$ montre que l'on peut prendre $L = j+k-1$ dans ce cas. □

Dans le cas où $\alpha+\beta+1 = m \in \mathbb{N}$ la fonction $\Phi_{0,0}$ sera la somme d'une fonction analytique et d'un terme logarithmique du type $\delta.|s|^{2m+p+q}.Log|s|^2$, qui sera obtenu pour $\nu = 2m+p+q$. On peut alors mettre le terme initial $c.|s|^{2m}.s^p.\bar{s}^q$ dans les termes non singuliers, sortir le terme logarithmique et conclure de façon analogue au cas précédent pour la fonction $G^{p,q}_{\alpha,\beta,0,0}$. Le cas où $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ est arbitraire s'en déduit alors par dérivation $j-$fois en α et $k-$fois en β.

Il nous reste à prouver que pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$ on a en fait un polynôme en $Log|s|$ de degré $\leq j+k-1$. Il suffit en fait de montrer ce résultat pour $j+k=1$ car le cas général s'en déduit immédiatement par dérivation en α et β.
Il s'agit donc de montrer que pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$ et, par exemple[4] $j=0, k=1$ la fonction $G^{p,q}_{\alpha,\beta,0,1}$ est $\mathscr{C}^\infty$. Mais ceci est évident puisque la fonction $u \to |u|^{2\alpha}$ est $\mathscr{C}^\infty$ dans ce cas. ■

[4]rappelons que l'on a symétrie entre j et k.

Cinquième et dernière étape. D'après la seconde étape, on peut se contenter d'integrer sur le disque $\{|u| \leq 1\}$ pour prouver l'assertion. Fixons un entier N. D'après la troisième étape, on peut alors remplacer dans l'intégrale les fonctions θ et η par des polynômes de degrés $N+1$ pour établir l'existence et la forme du développement asymptotique d'ordre N puisque l'erreur commise sera de classe $\mathscr{C}^N$ au voisinage de l'origine.
En développant le polynôme en $s-u$ on est alors ramené à montrer l'existence d'un développement asymptotique du type désiré pour les fonctions du type

$$s^{p'}.\bar{s}^{q'}.G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}(s).$$

Ceci est donné par la proposition de l'étape 4.
On remarquera que l'on a prouvé en même temps que les fonctions $F_{\alpha,\beta,j,k}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de l'origine, puisque c'est le cas pour les fonctions $G^{p,q}_{\alpha,\beta,j,k}$. Ceci achève la preuve du théorème 2.2.1. ■

2.3 Preuves de la proposition 1.0.3 et du corollaire 1.0.6.

Commençons par démontrer la proposition 1.0.3.

Preuve de la proposition 1.0.3 . Soit donc K un compact de X contenant le support de φ et notons

$$\mathcal{M}_K := \{DA[\int_{f=s} \psi],\ \psi \in \mathscr{C}^\infty_K(X,\mathbb{C})^{n,n}\}$$

où $DA(F)$ désigne le développement asymptotique à l'origine de la fonction F. Alors $\mathcal{M}_K$ est un $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]-$module de type fini d'après [B. 82], qui est contenu dans

$$|\Xi|^2_{R,n} := \sum_{(r,j)\in R\times[0,n]} \mathbb{C}[[s,\bar{s}]].|s|^{2r}.(Log|s|)^j,$$

où $R \subset \mathbb{Q}\cap[0,1[$ est un sous-ensemble fini.
Notons $\tilde{\mathcal{M}}_K$ le saturé de $\mathcal{M}_K$ par les opérateurs $s\frac{\partial}{\partial s}$ et $\bar{s}\frac{\partial}{\partial \bar{s}}$. Comme $|\Xi|^2_{R,n}$ est stable par ces deux opérateurs, la noethérianité de $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$ implique que $\tilde{\mathcal{M}}_K$ est également de type fini sur $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$.
Mais d'après [B.-S. 74][5], on a $s^{n+1}.\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{M}_K \subset \mathcal{M}_K$ ainsi que $\bar{s}^{n+1}.\frac{\partial}{\partial \bar{s}}\mathcal{M}_K \subset \mathcal{M}_K$. Ceci montre que l'on a l'inclusion

$$\tilde{\mathcal{M}}_K \subset \mathcal{M}_K[s^{-1},\bar{s}^{-1}].$$

[5]en combinant l'inclusion $f^{n+1}.\Omega^{n+1}_X \subset df \wedge \Omega^n_X$ avec la formule de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{f=s}\varphi = \int_{f=s}\frac{d'\varphi}{df}.$$

La finitude de $\tilde{\mathcal{M}}_K$ sur $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$ donne alors l'existence d'un entier κ, ne dépendant que de f et du compact K, tel que l'on ait

$$|s|^{2\kappa}.\tilde{\mathcal{M}}_K \subset \mathcal{M}_K.$$

Il nous suffit donc de prouver la proposition pour $\tilde{\mathcal{M}}_K$ en prenant $\kappa = 0$ dans ce cas.

Comme $\tilde{\mathcal{M}}_K$ est stable par $s\frac{\partial}{\partial s}$ et $\bar{s}\frac{\partial}{\partial \bar{s}}$, l'utilisation itérée des opérateurs

$$s\frac{\partial}{\partial s} - (r_1 + m_1) \quad \text{et} \quad \bar{s}\frac{\partial}{\partial \bar{s}} - (r_1 + m_1')$$

permet de supprimer dans le développement asymptotique de φ tous les termes qui ne sont pas des $\mathcal{O}(|s|^{2N})$ (il n'y en a qu'un nombre fini) et qui ne sont pas de la forme $|s|^{2r}.s^m.\bar{s}^{m'}.P(Log|s|)$ où P est un polynôme de degré égal à j (rappelons que l'on a supposé que j est maximal pour (r,m,m') donné). Ceci permet alors de conclure. ∎

Remarque. Si la fonction f est contenue dans son idéal jacobien au voisinage du compact K, on a $\tilde{\mathcal{M}}_K = \mathcal{M}_K$ et l'on peut prendre $\kappa = 0$ dans la proposition. On a donc le résultat optimal dans ce cas.

En utilisant de manière anticipée les résultats de la section suivante, nous allons démontrer le le corollaire 1.0.6.

Preuve du corollaire 1.0.6. La première partie du corollaire est immédiate puisque l'on sait que modulo $\mathbb{Z}$ les racines du polynôme de Bernstein de f à l'origine correspondent aux exposants qui apparaissent effectivement dans les développements asymptotiques des intégrales fibres au voisinage de l'origine ; voir par exemple [Bj. 93] chapitre 6.5.
La réciproque est conséquence de la proposition 1.0.3 qui permet d'appliquer le théorème précis 1.0.4 et ainsi d'éviter les phénomènes de compensation entre différents termes des développements asymptotiques de f et g. ∎

3 Calcul des constantes : démonstration du théorème précis.

3.1 Préliminaires.

Notation. Pour $a, b, \cdots$ des nombres complexes, nous noterons $\alpha, \beta, \cdots$ leurs parties réelles respectives.

Notons pour p, q entiers positifs,

$$U_{p,q} := \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \ / \ \alpha + p/2 > -1 \quad \text{et} \quad \beta + q/2 > -1\}$$
$$U^0_{p,q} := U_{p,q} \cap \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \ / \ \alpha + \beta + 1 + \frac{p+q}{2} < 0\}$$
$$V_{p,q} := U_{p,q} \setminus \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \ / \ a + b + 1 \in \mathbb{Z}\}.$$

On remarquera que pour $(a,b) \in U^0_{p,q}$, on a $a + b + 1 \notin \mathbb{N}$ puisque les inégalités imposées impliquent $-1 - \frac{p+q}{2} < \alpha + \beta + 1 < -\frac{p+q}{2}$. $\square$

Nous poserons, pour $x \in \mathbb{R}, |x| < 1, m \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha > -1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - x.e^{-i\theta}|^{2a}.e^{im\theta}.d\theta = \sum_{r=0}^{+\infty} \gamma^r_{a,m}.x^r. \tag{@}$$

On remarquera que $\gamma^r_{a,m} = 0$ si $r \neq m$ modulo 2, puisque l'intégrale considérée est invariante par le changement $x \to -x$ et $\theta \to \theta + \pi$.
La conjuguaison complexe montre que l'on a

$$\overline{\gamma^r_{\bar{a},-m}} = \gamma^r_{a,m}$$

il nous suffira donc de considérer le cas où m est dans $\mathbb{N}$.
On remarquera également que les coefficients $\gamma^r_{a,m}$ dépendent holomorphiquement de a sur l'ouvert $\alpha > -1$, d'après la formule de Cauchy.

Lemme 3.1.1 *La fonction holomorphe définie sur l'ouvert $U^0_q := U^0_{0,q}$ de $\mathbb{C}^2$ en posant*

$$G_q(a,b) := \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} |1-t|^{2a}.t^q.|t|^{2b}.dt \wedge d\bar{t}$$

est égale à

$$\frac{1}{2}.\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+q+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a)\Gamma(-b)\Gamma(a+b+q+2)}. \tag{*}$$

Preuve. Commençons par remarquer que la convergence absolue de l'intégrale définissant G_q est assurée en $t = 0$ par la condition $2\beta + q + 1 > -1$, en $t = 1$ par la condition $\alpha > -1$ et en $|t| = +\infty$ par la condition $2(\alpha + \beta) + q + 1 < -1$. Donc la fonction G_q est bien holomorphe sur l'ouvert U^0_q.
Pour prouver la formule (*) il suffit de le faire quand $a = \alpha$ et $b = \beta$. Ce que nous supposerons donc dans la suite.
En coordonnées polaires $t = \rho.e^{i\theta}$ on aura, pour $(\alpha, \beta) \in U^0_q$:

$$G_q(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} (1+\rho^2)^\alpha.\rho^{2(\beta+q/2+1)}.\frac{d\rho}{\rho}.\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(1 - \frac{2\rho.\cos\theta}{1+\rho^2}\big)^\alpha.e^{iq\theta}.d\theta\Big) \tag{**}$$

Mais on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(1-\frac{2\rho.cos\,\theta}{1+\rho^2}\big)^{\alpha}.e^{iq\theta}.d\theta =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1).k!}.\frac{(-1)^k.2^k.\rho^k}{(1+\rho^2)^k}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}cos^k\theta.e^{iq\theta}.d\theta.$$

Et, comme on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}cos^k\theta.e^{iq\theta}.d\theta \;=\frac{1}{2^k}.C_k^j \qquad \text{si} \quad k=q+2j, \text{ avec } \quad j\in[0,k], \text{ et}$$
$$= 0 \quad \text{sinon, on obtient}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(1-\frac{2\rho.cos\,\theta}{1+\rho^2}\big)^{\alpha}.e^{iq\theta}.d\theta =$$
$$(-1)^q.\sum_{j=0}^{+\infty}C_{q+2j}^j\times\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-q-2j+1).(q+2j)!}\times\frac{\rho^{q+2j}}{(1+\rho^2)^{q+2j}}.$$

En reportant dans $(^{**})$ cela donne

$G_q(\alpha,\beta)=$

$$(-1)^q.\sum_{j=0}^{+\infty}C_{q+2j}^j\times\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-q-2j+1).(q+2j)!}\times\int_0^{+\infty}(1+\rho^2)^{\alpha-q-2j}.\rho^{2(\beta+q+j+1)}.\frac{d\rho}{\rho}.$$

Utilisons alors la formule classique

$$\int_0^{+\infty}(1+x^2)^{-u}.x^v.dx=\frac{1}{2}.\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2}).\Gamma(u-\frac{v+1}{2})}{\Gamma(u)}$$

avec $u=q+2j-\alpha$ et $1+v=2(\beta+q+j+1)$. On obtient

$$G_q(\alpha,\beta)=\frac{(-1)^q}{2}.\Gamma(\alpha+1).\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\beta+q+j+1).\Gamma(-\alpha-\beta+j-1).(q+2j)!}{\Gamma(\alpha-q-2j+1).[(q+2j)!]\Gamma(q+2j-\alpha).j!(q+j)!}.$$

Après simplification par $(q+2j)!$ et utilisation de la formule des compléments qui donne

$$\Gamma(\alpha-q-2j+1).\Gamma(q+2j-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi(q+2j-\alpha)}$$
$$=(-1)^{q+1}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}=(-1)^q.\Gamma(1+\alpha).\Gamma(-\alpha)$$

on arrive à

$$G_q(\alpha,\beta)=\frac{1}{2.\Gamma(-\alpha)}\times\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\beta+q+j+1).\Gamma(-\alpha-\beta+j-1)}{\Gamma(q+j+1).j!}$$

Utilisons maintenant la formule (voir Erdelyi, Magnus ... p. 10)

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(j+x).\Gamma(j+y)}{\Gamma(j+z).j!} = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y).\Gamma(z-x-y)}{\Gamma(z-x).\Gamma(z-y)}.$$

On obtient avec $x = \beta + q + 1, y = -\alpha - \beta - 1$ et $z = q + 1$

$$G_q(\alpha, \beta) \; = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma(\beta+q+1).\Gamma(-\alpha-\beta-1).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha).\Gamma(-\beta).\Gamma(\alpha+\beta+q+2)}$$

c'est à dire la formule annoncée. ■

Remarques.

1) Le changement $t \to 1/t$ transforme $G_q(\alpha, \beta)$ en $\overline{G_q(\alpha, -(\alpha+\beta+q+2))}$. On constate que ceci est bien compatible avec la formule obtenue puisque si $\alpha' = \alpha,\ \beta' = -(\alpha+\beta+q+2)$ on a

$$\beta' + q + 1 = -\alpha - \beta - 1, \quad -\alpha' - \beta' - 1 = \beta + q + 1,$$
$$\alpha' + \beta' + q + 2 = -\beta \qquad etc...$$

2) On notera également que l'ouvert $U^0_{0,q}$ est stable par cette involution, puisque

$$\beta' + q/2 + 1 = -\alpha - \beta - q/2 - 1 > 0 \quad \text{ainsi que}$$
$$\alpha' + \beta' + q/2 + 1 = -\beta - q/2 - 1 < 0$$

pour $(\alpha, \beta) \in U^0_{0,q}$.

3) On remarquera que pour $(\alpha, \beta) \in U^0_{0,q} \cap \mathbb{R}^2$ le nombre $G_q(\alpha, \beta)$ est réel. On en déduit que l'on a, pour tout $(\alpha, \beta) \in U^0_{0,q} \cap \mathbb{R}^2$

$$G_{\bar{q}}(\alpha, \beta) := \frac{i}{4\pi} \int\int_{\mathbb{C}} |1-t|^{2\alpha}.\bar{t}^q.|t|^{2\beta}.dt \wedge d\bar{t} = G_q(\alpha, \beta).$$

On a donc, pour $(a, b) \in U^0_{0,q}$ l'égalité $G_{\bar{q}}(a, b) = \overline{G_q(\bar{a}, \bar{b})}$. □

Considérons maintenant la même intégrale que dans le lemme précédent mais en demandant seulement à (a, b) de vérifier les conditions de convergence en $t = 0$ et $t = 1$ c'est à dire d'être dans l'ouvert $U_{0,q}$ défini par les inégalités $\alpha > -1$ et $\beta + q/2 > -1$. L'intégrale diverge alors à l'infini, mais le lemme suivant montre que sa "partie finie", c'est à dire le terme constant dans le développement asymptotique à l'infini de cette intégrale donne le prolongement méromorphe de la fonction G_q à l'ouvert $U_{0,q}$.

Lemme 3.1.2 *Soit* q *un entier positif ou nul. Pour* $(a,b) \in V_{0,q}$ *on a, pour* N *entier assez grand,*

$$\lim_{s\to 0}\Big[\frac{i}{4\pi}\int_{|t|\leq 3}|1-t|^{2a}.t^q.|t|^{2b}.dt\wedge d\bar{t}\,+ \tag{***}$$

$$\int_3^{1/|s|}\rho^{2(a+b+1)+q}.\frac{d\rho}{\rho}.\big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-\frac{e^{-i\theta}}{\rho}|^{2a}.e^{iq\theta}.d\theta-\sum_0^N\gamma_{a,q}^r.\rho^{-r}\big]\Big] =$$

$$\frac{1}{2}.\frac{\Gamma(a+1).\Gamma(b+q+1).\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a).\Gamma(-b).\Gamma(a+b+q+2)}+\sum_{r=0}^N\frac{\gamma_{a,q}^r}{2(a+b+1)+q-r}.3^{2(a+b+1)+q-r}$$

Preuve. Remarquons déjà que pour N fixé, la différence

$$\big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-\frac{e^{-i\theta}}{\rho}|^{2a}.e^{iq\theta}.d\theta-\sum_0^N\gamma_{a,q}^r.\rho^{-r}\big]$$

est un $O(\rho^{-N-1})$ et donc que pour $2(\alpha+\beta+1)+q-N-1<0$ l'intégrale de 3 à $+\infty$ converge et la limite cherchée est simplement la valeur de cette intégrale.
Il s'agit donc simplement de montrer que le prolongement analytique de la fonction holomorphe G_q définie sur l'ouvert $U_{0,q}^0$ est bien donné par cette intégrale. On concluera alors grâce au lemme précédent.
Mais pour $(a,b)\in U_{0,q}^0$, en coupant l'intégrale définissant G_q pour $|t|\leq 3$ et pour $|t|\geq 3$ et en utilisant le développement (@) à l'ordre N dans cette dernière, on obtient bien l'égalité de la limite du membre de gauche de (***) avec G_q sur l'ouvert $U_{0,q}^0$, puisque $|s|^{-[2(a+b+1)+q-r]}$ tend vers 0 quand $s\to 0$, étant donné que l'on a $\alpha+\beta+q/2+1<0$ et $r\geq 0$. ■

On remarquera que ceci montre que le prolongement analytique de la fonction G_q a des pôles simples (au plus) sur les droites

$$a+b+1=\frac{r-q}{2}\quad \text{pour}\quad r\in\mathbb{N},\quad r=q\quad \textit{modulo } 2.$$

Le fait que ces points soient réellement des pôles simples quand $a+b+1\in\mathbb{N}$ est montré à posteriori par la formule que l'on a établie. Ceci permet de calculer les coefficients $\gamma_{a,q}^r$. On obtient, pour $a\notin\mathbb{N}$, en utilisant la formule des compléments (on notera que $a\notin-\mathbb{N}$ sous nos hypothèses, puisque l'on a $\alpha>-1$ et aussi que $\frac{r+q}{2}-a\notin-\mathbb{N}$, puisque $\frac{r+q}{2}-\alpha=\beta+q+1>0$)

$$\begin{aligned}\gamma_{a,q}^r &= \frac{\Gamma(a+1).\Gamma(\frac{r+q}{2}-a).(-1)^{\frac{r-q}{2}}}{\Gamma(-a).\Gamma(a+1-\frac{r-q}{2}).\Gamma(\frac{r+q}{2}+1).(\frac{r-q}{2})!}\\ &= (-1)^r.\frac{\Gamma(a+1)^2}{\Gamma(a+1-\frac{r-q}{2}).\Gamma(a+1-\frac{r+q}{2}).(\frac{r-q}{2})!(\frac{r+q}{2})!}\quad .\end{aligned} \tag{@@}$$

Pour $a \in \mathbb{N}$ le calcul direct donne, pour $q \leq r \leq r+q \leq 2a$

$$\gamma_{a,q}^{r} = (-1)^{r}.C_{a}^{(r+q)/2}.C_{a}^{(r-q)/2},$$

et 0 sinon, ce qui coïncide bien avec (@@).

La situation précédente où $a+b+1 \in \mathbb{N}$ avec a non entier est examinée dans le lemme suivant.

Lemme 3.1.3 *Soit q un entier positif ou nul. Pour $(a,b) \in U_{0,q}, a+b+1 \in \mathbb{N}$, a* **non entier**, *posons $r_0 = 2(a+b+1)+q$. Alors on a, pour $N \geq r_0$ entier*

$$\lim_{s \to 0} \Big[\frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 3} |1-t|^{2a}.t^{q}.|t|^{2b}.dt \wedge d\bar{t} +$$

$$\int_{3}^{1/|s|} \rho^{2(a+b+1)+q+j}.\frac{d\rho}{\rho}.\big[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |1 - \frac{e^{-i.\theta}}{\rho}|^{2a}.e^{iq\theta}.d\theta - \sum_{0}^{N} \gamma_{a,q}^{r}.\rho^{-r}\big]\Big] +$$

$$- \sum_{r=0, r\neq r_0}^{N} \frac{\gamma_{a,q}^{r}}{2(a+b+1)+q-r}.3^{2(a+b+1)+q-r} + \gamma_{a,q}^{r_0}.Log\, 3$$

est égale à

$$\frac{(-1)^{r_0}}{2}\frac{\big[\Gamma'(1) + \sum_{j=1}^{(r_0-q)/2}\frac{1}{j}\big].\Gamma(a+1)^2}{\Gamma((a+1-\frac{r_0+q}{2}).\Gamma((a+1-\frac{r_0-q}{2}).(\frac{r_0+q}{2}!).(\frac{r_0-q}{2}!)} \quad .$$

Preuve. La preuve est la même que pour le lemme précédent sauf que le terme pour $r = r_0$ donne un terme logarithmique dans ce cas. On doit donc évaluer la valeur en $2(a+b+1)+q = r_0$ de la somme

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(a+1).\Gamma(b+q+1).\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a).\Gamma(-b).\Gamma(a+b+q+2)} + \frac{1}{2}\frac{\gamma_{a,q}^{r_0}}{a+b+1+(q-r_0)/2}.$$

Compte tenu de la formule (@@), du fait que l'on a, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(z-k) = \frac{(-1)^k}{k!}.[\frac{1}{z} + \Gamma'(1) + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + o(z)]$$

quand $z \to 0$, un calcul simple montre que la valeur de cette limite est bien celle annoncée. ■

On notera que cette limite n'est jamais nulle puisque l'on suppose que a n'est pas un entier

Lemme 3.1.4 *Soient* $0 \leq p \leq q$ *deux entiers. Posons pour* $(a,b) \in U^0_{p,q}$

$$F_{p,q}(a,b) := \frac{i}{\pi}\int\int_{\mathbb{C}} |1-t|^{2a}.(1-t)^p.|t|^{2b}.t^q.dt \wedge d\bar{t}$$
$$F_{p,\bar{q}}(a,b) := \frac{i}{\pi}\int\int_{\mathbb{C}} |1-t|^{2a}.(1-t)^p.|t|^{2b}.\bar{t}^q.dt \wedge d\bar{t}$$

On a alors

$$F_{p,q}(a,b) = \frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+q+1).\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(a+b+p+q+2).\Gamma(-a).\Gamma(-b)}$$
$$F_{p,\bar{q}}(a,b) = (-1)^p.\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+q+1).\Gamma(-a-b-p-1)}{\Gamma(a+b+q+2).\Gamma(-a).\Gamma(-b)} \quad .$$

Remarques.

i) On vérifie facilement les égalités "évidentes à priori" sur $U^0_{p,q} \cap \mathbb{R}^2$

$$F_{p,0} = F_{p,\bar{0}} \quad \text{et} \quad F_{0,q} = F_{0,\bar{q}}.$$

ii) Une conséquence simple du lemme précédent est le prolongement méromorphe des fonctions $F_{p,q}$ et $F_{p,\bar{q}}$ à l'ouvert $U_{p,q}$ avec des pôles au plus simples sur les droites $a+b+1 \in \mathbb{N}$.

Preuve. La formule suivante sera la clef de cette preuve.

Lemme 3.1.5 *Soit* $p \in \mathbb{N}$*. Pour* x, y *dans* $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ *on a*

$$A_p(x,y) := \sum_{j=0}^{p} (-1)^j.C^j_p.\frac{\Gamma(x+j)}{\Gamma(x+y+j)} = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p).\Gamma(y)} \quad .$$

Preuve. Montrons cette égalité par récurrence sur $p \geq 0$. Le cas $p = 0$ est trivial. Supposons la formule démontrée pour p et montrons-là pour $p+1$. En utilisant l'égalité $C^j_{p+1} = C^j_p + C^{j-1}_p$ on obtient

$$A_{p+1}(x,y) = A_p(x,y) - A_p(x+1,y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p).\Gamma(y)} - \frac{\Gamma(x+1).\Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p+1).\Gamma(y)}$$
$$= \frac{\Gamma(x).\Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p+1).\Gamma(y)}[x+y+p-x]$$
$$= \frac{\Gamma(x).\Gamma(y+p+1)}{\Gamma(x+y+p+1).\Gamma(y)} \quad .$$

■

Preuve du lemme 3.1.5. La formule du binôme donne

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a,b) &= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j . C_p^j . G_{q+j}(a,b) \\ &= \frac{\Gamma(a+1).\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a).\Gamma(-b)} \times \Big(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j . C_p^j . \frac{\Gamma(b+q+j+1)}{\Gamma(a+b+q+j+2)} \Big) \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme ci-dessus avec $x = b+q+1, y = a+1$ on obtient la formule annoncée.
La formule du binôme donne

$$\begin{aligned} F_{p,\bar{q}}(a,b) &= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j . C_p^j . G_{q-j}(a,b+j) \\ &= \frac{\Gamma(a+1).\Gamma(b+q+1)}{\Gamma(-a).\Gamma(a+b+q+2)} \times \Big(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j . C_p^j . \frac{\Gamma(-a-b-j-1)}{\Gamma(-b-j)} \Big) \end{aligned}$$

La formule des compléments donne alors la formule annoncée. ■

Remarque. Pour $a+b+1 \notin \mathbb{N}$, les nombres complexes $F_{p,q}(a,b)$ et $F_{p,\bar{q}}(a,b)$ sont non nuls. □

3.2 Le premier cas.

Notation. Soient $0 \leq p \leq q$ deux entiers et soit D le disque unité du plan complexe. Pour $(a,b) \in U_{p,q}$ et $s \in D^* := D \setminus \{0\}$ posons

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a,b)[s] &:= \frac{i}{4\pi} \int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.|u|^{2b}.u^q.du \wedge d\bar{u} \\ F_{p,\bar{q}}(a,b)[s] &:= \frac{i}{4\pi} \int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.|u|^{2b}.\bar{u}^q.du \wedge d\bar{u} \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1 (Le premier cas : $a+b+1$ n'est pas dans $\mathbb{N}$.) *On suppose que $(a,b) \in V_{p,q}$. Alors il existe des fonctions $\Phi_{p,q}$ et $\Phi_{p,\bar{q}}$ qui sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $V_{p,q} \times D$, holomorphes sur $V_{p,q}$ pour $s \in D$ fixé, telles que l'on ait sur $V_{p,q} \times D^*$*

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a,b)[s] &= F_{p,q}(a,b).s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q}.\Phi_{p,q}(a,b,s) \\ F_{p,\bar{q}}(a,b)[s] &= F_{p,\bar{q}}(a,b).s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p}.\Phi_{p,\bar{q}}(a,b,s) \end{aligned}$$

Preuve. Remarquons déjà que le fait que ces fonctions soient $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U^0_{p,q} \times D^*$, holomorphes sur $U^0_{p,q}$ pour $s \in D^*$ fixé, est conséquence immédiate des définitions. Nous allons commencer par traiter le cas de $F_{p,q}$. Pour $s \in D^*$ effectuons le changement de variable $u = s.t$. On obtient

$$F_{p,q}(a,b)[s] = s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)}.\frac{i}{4\pi}\int_{|t|\leq 1/|s|} |1-t|^{2a}.(1-t)^p.|t|^{2b}.t^q.dt\wedge d\bar{t}$$
$$= s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)}.\sum_{j=0}^{p}(-1)^j.C_p^j.\frac{i}{4\pi}\int_{|t|\leq 1/|s|} |1-t|^{2a}.t^{q+j}.|t|^{2b}.dt\wedge d\bar{t}.$$

Supposons $|s| < 1/3$ et posons

$$C^0_{p,q}(a,b) := \frac{i}{4\pi}\int_{|t|\leq 3} |1-t|^{2a}.(1-t)^p.|t|^{2b}.t^q.dt\wedge d\bar{t}.$$

L'intégrale pour $3 \leq |t| \leq 1/|s|$ correspondant au terme $j \in [0,p]$ donne en coordonnées polaires

$$I_j = \int_3^{1/|s|} \rho^{2(a+b)+q+j+1}.d\rho\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1-\frac{e^{-i\theta}}{\rho}|^{2a}.e^{i(q+j)\theta}.d\theta. \tag{A}$$

Utilisons le développement (@), en se souvenant que l'on a $r = q+j$ modulo 2 :

$$\begin{aligned} I_j &= \sum_{r=0}^{+\infty}\gamma^r_{a,q+j}.\int_0^{1/|s|} \rho^{2(a+b+(q+j-r)/2))+1}.d\rho \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\gamma^r_{a,q+j}}{2(a+b+(q+j-r)/2)+1)}.\Big[|s|^{-2(a+b+(q+j-r)/2)+1)} - 3^{-2(a+b+(q+j-r)/2)+1)}\Big] \\ &= C^1_{j,q}(a,b) + |s|^{-2(a+b+1)}.\Psi_j(a,b,|s|^2). \end{aligned} \tag{B}$$

la fonction Ψ_j étant une série de Laurent en $|s|^2$ dont les coefficients sont holomorphes en (a,b) pourvu que $a+b \notin \mathbb{Z}$. On notera que la puissance maximale négative en $|s|^2$ dans Ψ_j est $(j+q)/2 \leq (p+q)/2$.
On obtient alors

$$F_{p,q}(a,b)[s] = C_{p,q}(a,b).s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)} + \sum_{j=0}^{p}(-1)^j.C_p^j.s^{p+q}.\Psi_j(a,b,|s|^2)$$

où nous avons posé

$$C_{p,q}(a,b) = C^0_{p,q}(a,b) + \sum_{j=0}^{p}(-1)^j.C_p^j.C^1_{j,q}(a,b).$$

Ceci établit l'assertion annoncée pour la fonction $F_{p,q}$ sauf qu'il nous reste à montrer les deux points suivants :

1. La fonction $\Phi_{p,q}(a,b,s) := \sum_{j=0}^{p}(-1)^j.C_p^j.s^{p+q}.\Psi_j(a,b,|s|^2)$ est bien $\mathscr{C}^\infty$ en $s=0$, c'est à dire ne présente pas de termes non nul de la forme $s^{p+q}/|s|^{2k}$ avec $k \geq 1$.

2. Montrer que la constante $C_{p,q}(a,b)$ est bien égale à $F_{p,q}(a,b)$.

Pour établir le premier point considérons un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et calculons la différence $F_{p,q}(a,b)[\lambda.s] - \lambda^{p+q}.|\lambda|^{2(a+b+1)}.F_{p,q}(a,b)[s]$. Le changement de variable $v = \lambda.u$ montre que cette différence est donnée, pour $|\lambda| < 1$ par l'intégrale

$$\frac{i}{4\pi}\int_{1\leq|v|\leq 1/|\lambda|} |s-v|^{2a}.(s-v)^p.|v|^{2b}.v^q.dv\wedge d\bar{v}.$$

Cette différence est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^2 \times D$, holomorphe sur $\mathbb{C}^2$ à $s \in D$ fixé. Mais la présence d'un terme non nul de la forme $c.s^{p+q}/|s|^{2k}$ avec $k \geq 1$ produirait dans le développement à l'origine de la différence précédente le terme

$$c.\Big[\lambda^{p+q}.(|\lambda|^{-2k} - |\lambda|^{2(a+b+1)})\Big].s^{p+q}/|s|^{2k}$$

nécessairement non nul puisque $\alpha + \beta + 1 > -1$, ce qui contredirait l'aspect $\mathscr{C}^\infty$ en $s = 0$ de cette différence.

L'identification de la constante s'obtient facilement en utilisant les lemmes 3.1.2 et 3.1.4.
La preuve pour la fonction $F_{p,\bar{q}}$ est tout à fait analogue.
On notera que le terme $s^p.\bar{s}^q/|s|^{2k}$ est $\mathscr{C}^\infty$ pour $k \in [0,p]$, puisque l'on a supposé $0 \leq p \leq q$, ce qui explique le facteur $\bar{s}^{q-p}$ dans ce cas. ■

Remarque. Pour a ou b dans $\mathbb{N}$ on a $F_{p,q}(a,b) = 0$ ainsi que $F_{p,\bar{q}}(a,b) = 0$ ce qui montre que la fonction considérée est $\mathscr{C}^\infty$ en $s = 0$. Ceci est évident à priori puisque l'on convole une fonction $\mathscr{C}^\infty$ avec une fonction localement intégrable à support compact.

Corollaire 3.2.2 *Dans la situation de la proposition précédente, soient j et k deux entiers, et définissons pour $(a,b) \in V_{p,q}$ les fonctions*

$$F^{j,k}_{p,q}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2b}.u^q.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar{u}$$

$$F^{j,k}_{p,\bar{q}}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2b}.\bar{u}^q.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar{u}$$

Alors on a

$$F^{j,k}_{p,q}(a,b)[s] = P^{j,k}_{p,q}(a,b)[Log|s|^2].s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q}.\Phi_{p,q}(a,b,s)$$
$$F^{j,k}_{p,\bar{q}}(a,b)[s] = P^{j,k}_{p,\bar{q}}(a,b)[Log|s|^2].s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p}.\Phi_{p,\bar{q}}(a,b,s)$$

où $P^{j,k}_{p,q}$ et $P^{j,k}_{p,\bar{q}}$ sont des polynômes de degré $j+k$ dont les coefficients dépendent holomorphiquement de (a,b) et dont les coefficients dominants sont donnés par $F_{p,q}(a,b)$ et $F_{p,\bar{q}}(a,b)$ respectivement, et où les fonctions $\Phi^{j,k}_{p,q}$ et $\Phi^{j,k}_{p,\bar{q}}$ sont obtenues via l'opération $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$ sur les fonctions $\Phi_{p,q}$ et $\Phi_{p.\bar{q}}$ de la proposition précédente.

PREUVE. Il suffit d'appliquer l'opérateur différentiel $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$ dans l'assertion de la proposition précédente. ■

COMPLÉMENT. Dans le cas où a (ou bien b) est dans $\mathbb{N}$, avec $(a,b) \in U_{p,q}$, le terme de degré $k+j$, c'est à dire le coefficient de
$s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)}.\big[Log|s|^2\big]^{j+k}$ (resp. de $s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(a+b+1)}.\big[Log|s|^2\big]^{j+k}$) est nul.
Pour avoir le terme singulier dominant non nul on doit donc calculer le coefficient de $s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)}.\big[Log|s|^2\big]^{j+k-1}$ (resp. $s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(a+b+1)}.\big[Log|s|^2\big]^{j+k-1}$). Un calcul simple donne que ce coefficient vaut

$$\Big[\frac{\partial F_{p,q}}{\partial a} + \frac{\partial F_{p,q}}{\partial b}\Big](a,b) \quad \text{(resp.} \qquad \Big[\frac{\partial F_{p,\bar{q}}}{\partial a} + \frac{\partial F_{p,\bar{q}}}{\partial b}\Big](a,b)).$$

Comme on a $\Gamma(z-k) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z} + holomorphe(z)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et z voisin de 0, on constate que pour obtenir le coefficient cherché il suffit de remplacer (si par exemple c'est a qui est dans $\mathbb{N}$) le facteur $1/\Gamma(-a)$ dans l'expression de $F_{p,q}$ par le nombre $(-1)^{a+1}.a!$ (resp. dans l'expression de $F_{p,\bar{q}}$) . Ceci montre que ces coefficients sont non nuls (car a et b ne peuvent être simultanément dans $\mathbb{N}$ puisque $a+b+1 \not\in \mathbb{N}$ par hypothèse).
Donc dans ces cas les polynômes en $Log|s|^2$ $P^{j,k}_{p,q}(a,b)$ et $P^{j,k}_{p,\bar{q}}(a,b)$ sont de degré exactement $j+k-1$. □

3.3 Le second cas.

Proposition 3.3.1 (Le second cas : a, b non entiers et $a+b+1 \in \mathbb{N}$.) *On suppose maintenant que $(a,b) \in U_{p,q}$ mais que $a+b+1$ est un entier. Alors on a*

$$F_{p,q}(a,b)[s] = \big[\tilde{F}_{p,q}(a,b).Log|s|^2 + c_{p,q}(a,b)\big].s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)} \ + \ s^{p+q}.\Psi_{p,q}(a,b,s)$$
$$F_{p,\bar{q}}(a,b)[s] = \big[\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a,b).Log|s|^2 + c_{p,\bar{q}}(a,b)\big].s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p}.\Psi_{p,\bar{q}}(a,b,s)$$

où les coefficients $\tilde{F}_{p,q}(a,b)$ et $\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a,b)$ sont donnés par les formules suivantes

$$\tilde{F}_{p,q}(a,b) = \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a).\Gamma(-b)}.\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+2).\Gamma(a+b+p+q+2)}$$
$$\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a,b) = \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a).\Gamma(-b)}.\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+q+2).\Gamma(a+b+p+2)}$$

où les fonctions $\Psi_{p,q}$ et $\Psi_{p,\bar{q}}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $U_{p,q} \times D$, holomorphes sur $U_{p,q}$ pour $s \in D$ fixé, et les fonctions $c_{p,q}$ et $c_{p,\bar{q}}$ sont holomorphes sur $U_{p,q}$.

REMARQUE. Quand on suppose de plus que a et b ne sont pas entiers, les nombres $\tilde{F}_{p,q}(a,b)$ et $\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a,b)$ ne sont pas nuls. □

PREUVE. Elle est analogue au cas de la proposition 3.2.1 sauf qu'il faut prendre en compte l'apparition du logarithme puisque le fait que $a+b+1$ soit entier oblige à rencontrer dans la somme l'intégrale $\int_3^{1/|s|} \frac{d\rho}{\rho}$. Posons $r_j = q+j+2(a+b+1)$, et reprenons le calcul de l'intégrale I_j (voir (A) dans la preuve de la proposition 3.2.1). Le terme en $s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)}.Log|s|$ aura pour coefficient $-\gamma_{a,q+j}^{r_j}$. On obtiendra ainsi que

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{p,q}(a,b) &= -\sum_{j=0}^{p} (-1)^j.C_p^j.\gamma_{a,q+j}^{r_j} \\
&= (-1)^{a+b}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(-a).\Gamma(-b).\Gamma(a+b+2)}.\sum_{j=0}^{p}(-1)^j.C_p^j.\frac{\Gamma(b+q+j+1)}{\Gamma(a+b+q+j+2)} \\
&= \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a).\Gamma(-b)}\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+2).\Gamma(a+b+p+q+2)}
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.1.5.

Le calcule analogue pour le coefficient $\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a,b)$ donne,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a,b) &= -\sum_{j=0}^{p} (-1)^j.C_p^j.\gamma_{a,j-q}^{r_j} \\
&= (-1)^{a+b+q}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(-a).\Gamma(-b-q).\Gamma(a+b+q+2)}.\sum_{j=0}^{p}(-1)^j.C_p^j.\frac{\Gamma(b+j+1)}{\Gamma(a+b+j+2)} \\
&= \frac{(-1)^{a+b+q}}{\Gamma(-a).\Gamma(-b-q)}\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+q+2).\Gamma(a+b+p+2)} \\
&= \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a).\Gamma(-b)}\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+q+2).\Gamma(a+b+p+2)}
\end{aligned}$$

d'après la formule des compléments. ■

Corollaire 3.3.2 *Dans la situation de la proposition précédente, soient j et k deux entiers, et définissons pour $(a,b) \in U_{p,q}$ vérifiant $a+b+1 \in \mathbb{N}$, les fonctions*

$$F_{p,q}^{j,k}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2b}.u^q.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar{u}$$

$$F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2b}.\bar{u}^q.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar{u}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
F_{p,q}^{j,k}(a,b)[s] &= P_{p,q}^{j,k}(a,b)[Log|s|^2].s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q}.\Phi_{p,q}(a,b,s) \\
F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)[s] &= P_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)[Log|s|^2].s^p.\bar{s}^q.|s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p}.\Phi_{p,\bar{q}}(a,b,s)
\end{aligned}$$

où $P^{j,k}_{p,q}$ *et* $P^{j,k}_{p,\bar q}$ *sont des polynômes de degré* $j+k+1$ *dont les coefficients dépendent holomorphiquement de* (a,b) *et dont les coefficients dominants sont donnés par* $\tilde F_{p,q}(a,b)$ *et* $\tilde F_{p,\bar q}(a,b)$ *respectivement, et où les fonctions* $\Phi^{j,k}_{p,q}$ *et* $\Phi^{j,k}_{p,\bar q}$ *sont obtenues via l'opération* $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$ *sur les fonctions* $\Phi_{p,q}$ *et* $\Phi_{p.\bar q}$ *de la proposition précédente.*

Preuve. Il suffit à nouveau d'appliquer l'opérateur différentiel $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$ dans l'assertion de la proposition précédente. ■

Le dernier cas à traiter est celui où a et b sont entiers. Ceci ne peut s'obtenir comme précédemment par dérivation du cas où les logarithmes n'apparaissent pas. Il faut donc traiter directement l'analogue des corollaires 3.2.2 et 3.3.2.

3.4 Le dernier cas.

Proposition 3.4.1 (Le cas a et b entiers.) *Donnons-nous deux entiers* $0 \leq p \leq q$. *Supposons maintenant que* a *et* b *sont dans* $\mathbb{Z}$ *et que l'on a* $a+p/2 > -1$ *et* $b+q/2 > -1$. *Pour* $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $s \in D^*$ *posons alors*

$$F^{j,k}_{p,q}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2b}.u^q.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar u$$
$$F^{j,k}_{p,\bar q}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.(Log|s-u|^2)^j.|u|^{2b}.\bar u^q.(Log|u|^2)^k.du\wedge d\bar u$$

Alors on a

$$\begin{aligned} F^{j,k}_{p,q}(a,b)[s] &= \check P^{j,k}_{p,q}(a,b)[Log|s|^2].s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q}.\Phi_{p,q}(a,b)[|s|^2] \\ F^{j,k}_{p,\bar q}(a,b)[s] &= \check P^{j,k}_{p,\bar q}(a,b)[Log|s|^2].s^p.\bar s^q.|s|^{2(a+b+1)} + \bar s^{q-p}.\Phi_{p,\bar q}(a,b)[|s|^2] \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

où $\check P^{j,k}_{p,q}$ *et* $\check P^{j,k}_{p,\bar q}$ *sont des polynômes de degré exactement* $j+k-1$ *et où les fonctions* $\Phi^{j,k}_{p,q}(a,b)$ *et* $\Phi^{j,k}_{p,\bar q}(a,b)$ *sont analytiques réelles.*

Preuve. Commençons par rappeler que pour $j=0$ ou $k=0$ (cas exclus de l'énoncé ci-dessus) les fonctions considérées sont $\mathscr{C}^\infty$ comme convolées d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et d'une fonction localement intégrable à support compact.
Le changement de variable $u = t.s$, pour $s \neq 0$ fixé donne

$$F^{j,k}_{p,q}(a,b)[s] = s^{p+q}.|s|^{2(a+b+1)}.I(s)$$

où nous avons posé

$$I(s) := \int_{|t|\leq 1/|s|} |1-t|^{2a}.(1-t)^p.(Log|1-t|^2 + Log|s|^2)^j.|t|^{2b}.t^q.(Log|s.t|^2)^k.dt\wedge d\bar t$$

ainsi qu'une expression analogue pour $F^{j,k}_{p,\bar q}(a,b)[s]$. Des calculs analogues à ceux déjà détaillés plus haut montrent facilement que l'on a des expressions du type (C), mais avec des polynômes en $Log|s|^2$ à priori de degrés inférieurs ou égaux à $k+j+1$. Nous allons démontrer l'assertion sur le degré de ces polynômes par récurrence sur $j+k=n\geq 2$. Pour $n=2$ on a nécessairement $j=k=1$ et il s'agit de montrer que les polynômes $\check P^{1,1}_{p,q}(a,b)$ et $\check P^{1,1}_{p,q}(a,b)$ sont de degrés exactement égal à 1. Le pas de récurrence qui va suivre montrera qu'ils sont de degrés au plus égal à 1. Il nous suffit donc de montrer que le coefficient de $Log|s|^2$ est non nul.
Ceci résulte du calcul de la constante $\gamma_{1,1}$ qui est fait au paragraphe 3.5.

Supposons démontré que pour $n\geq 2$ le degré des polynômes $\check P^{j,k}_{p,q}(a,b)$ et $\check P^{j,k}_{p,\bar q}(a,b)$ est au plus égal à $j+k-1$ et montrons ceci pour un couple $(j,k)\in(\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant $j+k=n+1$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$ et calculons la différence

$$F^{j,k}_{p,q}(a,b)[\lambda.s]-\lambda^{p+q}.|\lambda|^{2(a+b+1)}.F^{j,k}_{p,q}(a,b)[s]$$

en utilisant le changement de variable $u=\lambda.v$. On obtient $\frac{i}{4\pi}.\lambda^{p+q}.|\lambda|^{2(a+b+1)}$ multiplié par

$$\int_{1\leq|v|\leq 1/|\lambda|}|s-v|^{2a}.(s-v)^p.(Log|\lambda|+Log|s-v|)^j.|v|^{2b}.v^q.(Log|\lambda|+Log|v|)^k.dv\wedge d\bar v$$

$$+\int_{|v|\leq 1}|s-v|^{2a}.(s-v)^p.|v|^{2b}.v^q.Z.dv\wedge d\bar v$$

avec $Z:=\Big[(Log|\lambda|+Log|s-v|)^j.(Log|\lambda|+Log|v|)^k-(Log|s-v|)^j.(Log|v|)^k\Big]$

On constate que la première intégrale est $\mathscr{C}^\infty$ sur D, et que la seconde est une combinaison linéaire des fonctions $F^{j',k'}_{p,q}(a,b)$ avec $j'+k'\leq n$. On en déduit facilement notre assertion.
De plus, si $\gamma(j,k)$ désigne le coefficient de $(Log|s|)^{j+k-1}$ dans $\check P^{j,k}_{p,q}(a,b)$ le calcul ci-dessus donne facilement la relation

$$\gamma(j,k)=(j+k)!\gamma(1,1)\quad\forall j,k\geq 1$$

ce qui montre que si $\gamma(1,1)$ est non nul, il en est de même pour tous les $\gamma(j,k),\forall(j,k)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Nous allons montrer au paragraphe suivant que la constante $\gamma(1,1)$ (qui dépend de a,b,p,q) est non nulle, ce qui achèvera la preuve. ■

3.5 Le calcul de $\gamma(1,1)$.

Lemme 3.5.1 *Pour* $0\leq x<1$ *et* $p\in\mathbb{Z}$ *on a*

$$C_p(x):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log|1-x.e^{i\theta}|^2.e^{ip\theta}.d\theta=\frac{x^{|p|}}{|p|}\quad\text{pour}\quad p\neq 0$$

$$C_0(x):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log|1-x.e^{i\theta}|^2.d\theta=0.$$

Pour $x>1$ *on a* $C_p(x)=C_p(1/x)$ *pour* $p\neq 0$ *et* $C_0(x)=Log\,x^2$.

Preuve. Posons pour $x \in]0,1[$

$$A_p := \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=x} Log(1-z).z^p \frac{dz}{z}.$$

Alors on a $C_p(x) = x^{-p}.A_p - x^p.\bar{A}_{-p}$. Comme la formule de Cauchy donne

$$A_p = 0 \quad \text{pour} \quad p \geq 0 \quad \text{et}$$
$$A_p = -\frac{1}{p} \quad \text{pour} \quad p < 0$$

on conclut facilement. ■

Proposition 3.5.2 *Pour p, q deux entiers naturels, posons pour $s \in D$*

$$F_{p,q}(s) := \frac{i}{4\pi} \int_{|u|\leq 1} u^p.\bar{u}^q.Log|s-u|.Log|u|.du \wedge d\bar{u}.$$

Alors le coefficient du terme en $s^p.\bar{s}^q.Log|s|^2$ dans le développement asymptotique en $s = 0$ de $F_{p,q}$ vaut $-\frac{1}{4(p+1)(q+1)}$.

On remarquera que le terme en $s^p.\bar{s}^q.Log|s|^2$ est le seul terme non $\mathscr{C}^\infty$ dans le développement de cette fonction à l'origine.

Preuve. Commençons par le cas $p \neq q$. On a, en posant $u = s.t$ pour $s \neq 0$

$$F_{p,q}(s) = s^{p+1}.\bar{s}^{q+1} \frac{i}{4\pi} \int_{|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.Z.dt \wedge d\bar{t}$$
$$\text{avec} \quad Z := (Log|s| + Log|1-t|).(Log|s| + Log|t|)$$

Cela donne les trois termes suivants

$$A := s^{p+1}.\bar{s}^{q+1}.(Log|s|)^2.I_1$$
$$B := s^{p+1}.\bar{s}^{q+1}.(Log|s|).I_2$$
$$C := s^{p+1}.\bar{s}^{q+1}.I_3$$

où les intégrales I_1, I_2 et I_3 vont être examinées ci-dessous.
Remarquons déjà que le développement asymptotique de A ne donnera jamais de contribution au terme qui nous intéresse.
Pour B nous cherchons le terme constant dans le développement asymptotique de

$$I_2(s) := \frac{i}{4\pi} \int_{|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.(Log|1-t| + Log|t|).dt \wedge d\bar{t} \quad .$$

Cherchons déjà le terme constant dans le développement de l'intégrale

$$I_2'(s) := \frac{i}{4\pi} \int_{1\leq|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.(Log|1-t| + Log|t|).dt \wedge d\bar{t}$$
$$= \frac{1}{2}. \int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1}.C_{p-q}(\rho).d\rho \; + \int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1} Log\, \rho.d\rho \quad .$$

Comme le lemme précédent donne $C_{p-q}(\rho) = \frac{\rho^{-|p-q|}}{|p-q|}$ puisque l'on suppose $p \neq q$, on obtient facilement que le terme constant du développement de $I'_2(s)$ vaut

$$-\frac{1}{2}.\frac{1}{p+q+2-|p-q|} + \frac{1}{(p+q+2)^2}.$$

Il nous reste encore à évaluer la constante

$$I_2" := \frac{i}{4\pi}\int_{|t|\leq 1} t^p.\bar{t}^q.(Log|1-t| + Log|t|).dt\wedge d\bar{t}$$

ce qui est simple à l'aide du lemme précédent : il donne

$$\begin{aligned} I_2" &= \frac{1}{2}.\int_0^1 \rho^{p+q+1}.C_{p-q}(\rho).d\rho \ + \int_0^1 \rho^{p+q+1} Log\,\rho.d\rho \\ &= \frac{1}{2.|p-q|}.\Big[\frac{\rho^{p+q+2+|p-q|}}{p+q+2+|p-q|}\Big]_0^1 - \frac{1}{(p+q+2)^2} \\ &= \frac{1}{2.|p-q|}.\frac{1}{p+q+2+|p-q|} - \frac{1}{(p+q+2)^2} \end{aligned}$$

On trouve finalement, comme contribution de I_2 la constante

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2|p-q|}.\Big[\frac{1}{p+q+2-|p-q|} - \frac{1}{p+q+2+|p-q|}\Big] \\ &= -\frac{1}{4(p+1)(q+1)} \end{aligned}$$

Cherchons la contribution de C c'est à dire le terme en $Log|s|$ dans le développement asymptotique de

$$I_3(s) := \frac{i}{4\pi}\int_{|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.(Log|1-t|).(Log|t|).dt\wedge d\bar{t}$$

Comme le terme constant ne nous intéresse pas, on peut se contenter de regarder

$$\begin{aligned} I'_3(s) &:= \frac{i}{4\pi}\int_{1\leq|t|\leq 1/|s|} t^p.\bar{t}^q.(Log|1-t|).(Log|t|).dt\wedge d\bar{t} \\ &= \int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1}.C_{p-q}(\rho).Log\,\rho.d\rho \\ &= \frac{1}{|p-q|}.\int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1-|p-q|}.Log\,\rho.d\rho \end{aligned}$$

et il n'y a pas de terme en $Log|s|$ dans le développement asymptotique de $I_3(s)$, puisque $p+q+2-|p-q| \geq 2$.
Le cas $p = q$ est analogue en utilisant le calcul de $C_0(x)$ dans le lemme précédent, en prenant garde au cas $x > 1$. ∎

Corollaire 3.5.3 *Soient* a, b, p, q *des entiers naturels. Pour* $s \in D^*$, *posons*

$$F_{p,q}(a,b)[s] := \frac{1}{4i\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.Log|s-u|.|u|^{2b}.u^q.Log|u|.du \wedge d\bar{u}$$
$$F_{p,\bar{q}}(a,b)[s] := \frac{1}{4i\pi}\int_{|u|\leq 1} |s-u|^{2a}.(s-u)^p.Log|s-u|.|u|^{2b}.\bar{u}^q.Log|u|.du \wedge d\bar{u}$$

Le coefficient du terme en $|s|^{2(a+b+1)}.s^{p+q}.Log|s|$ *dans le développement asymptotique de* $F_{p,q}(a,b)$ *en* $s = 0$ *est égal à*

$$-\frac{1}{4}\frac{\Gamma(a+1).\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+p+q+2)} \quad .$$

Le coefficient du terme en $|s|^{2(a+b+1)}.s^p.\bar{s}^q.Log|s|$ *dans le développement asymptotique de* $F_{p,\bar{q}}(a,b)$ *en* $s = 0$ *est égal à*

$$-\frac{1}{4}\frac{\Gamma(a+1).\Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+q+2)}.\frac{\Gamma(a+p+1).\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+p+2)} \quad .$$

On remarquera à nouveau que, pour chacune de ces fonctions, le terme considéré est le seul terme non $\mathscr{C}^\infty$ du développement asymptotique.

Preuve. La formule du binôme et la proposition précédente donne que le coefficient cherché vaut, pour la fonction $F_{p,q}(a,b)$,

$$\frac{-1}{4}.\sum_{j=0}^{a+p}\sum_{k=0}^{a}(-1)^{j+k}.C^j_{a+p}.C^k_a\frac{1}{(b+q+j+1)(b+k+1)} \quad resp.$$
$$\frac{-1}{4}.\sum_{j=0}^{a+p}\sum_{k=0}^{a}(-1)^{j+k}.C^j_{a+p}.C^k_a\frac{1}{(b+j+1)(b+q+k+1)}$$

En utilisant la formule

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k.C^k_m\frac{1}{n+k} = \frac{\Gamma(m+1).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

on obtient facilement le résultat annoncé. L'autre cas est analogue. ■

Remarque. Le corollaire précédent montre, en particulier, que ces coefficients ne sont jamais nuls.

4 Références.

- [B. 82] Barlet, D. *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres*, Inv. Math. vol. 68 (1982), p. 129-174.

- [B. 86] Barlet, D. *Calcul de la forme hermitienne canonique pour* $X^a+Y^b+Z^c$, in Sem. P. Lelong, Lecture Notes, vol. 1198 Springer Verlag (1986), p. 35-46.

- [Bj. 93] Bjork,J.-E. *Analytic D-Modules and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1993.

- [B.-S. 74] Briançon, J. et Skoda, H. *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbb{C}^n$, C.R.Acad.Sci. Paris série A, 278 (1974), p.949-951.

- [K. 76] Kashiwara,M. *b-function and holonomic systems*, Inv. Math. 38, (1976), p.33-53.

- [M. 74] Malgrange, B. *Intégrale asymptotique et monodromie.* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. , t.7 (1974), p.405-430.

- [M. 83] Malgrange, B. *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente*, Astérisque 101-102 (1983), p.243-267.

- [Sak. 73] Sakamoto, K. *Milnor fibering and their characteristic maps*, Proc. Intern. Conf. on manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo 1973.

- [S.-T. 71] Sebastiani, M. and Thom, R. *Un résultat sur la monodromie*, Inv. Math. 13 (1971), p. 90-96.

Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr.